Produktregel (Skalarprodukt): $\big(\vec{x}(t)\cdot\vec{y}(t)\big)^{\cdot} = \dot{\vec{x}}(t)\cdot\vec{y}(t) + \vec{x}(t)\cdot\dot{\vec{y}}(t)$

Tangenteneinheitsvektor

$$\vec{e_t}(t) = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|} = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}}\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix}$$

Gesamtbeschleunigung

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \underbrace{\dot{v}(t)\vec{e_t}(t)}_{\vec{a_t}(t)} + \underbrace{v(t)\dot{\vec{e_t}}(t)}_{\vec{a_n}(t)}\\ &= \dot{v}(t)\vec{e_t}(t) + \frac{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t)-\dot{y}(t)\ddot{x}(t)|}{v(t)}\,\vec{e_n}(t)\\ &\overset{(3)}{=} \dot{v}(t)\vec{e_t}(t) + v^2(t)|\kappa(t)|\,\vec{e_n}(t) \qquad\qquad \dot{v}(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{v(t)}\end{aligned}$$

Bogenlänge

$$s(t) = \int_0^t v(\tilde{t})\,\mathrm{d}\tilde{t} = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2(\tilde{t})+\dot{y}^2(\tilde{t})}\,\mathrm{d}\tilde{t}$$

Weil $\dot{s}(t) = v(t) > 0\ \forall t\in I$ nach Vor. gilt, steigt $s(t)$ in I streng monoton. D.h. es existiert eine Bijektion zwischen t und s ($t \leftrightarrow s$ bzw. $I \leftrightarrow I_s$). $s(t)$ ist also umkehrbar auf I.

$$\vec{x}'\big(t(s)\big) = \begin{pmatrix}x\big(t(s)\big)\\ y\big(t(s)\big)\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\dot{x}\big(t(s)\big)t'(s)\\ \dot{y}\big(t(s)\big)t'(s)\end{pmatrix} = t'(s)\begin{pmatrix}\dot{x}\big(t(s)\big)\\ \dot{y}\big(t(s)\big)\end{pmatrix} = \frac{1}{v(t)}\,\vec{v}(t) = \vec{e_t}(t)$$

Krümmung

Definition. Als Krümmung $\kappa(t_0) = \kappa(s_0)$ des Kurvenstücks γ mit der Parameterdarstellung $\vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}, t\in I, t_0\in I$, im Kurvenpunkt $P(t_0) = P\big(x(t_0); y(t_0)\big)$ bezeichnet man im Fall seiner Existenz den Grenzwert

$$\kappa(t_0) = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\alpha(s_0+\Delta s)-\alpha(s_0)}{\Delta s} = \alpha'(s_0).$$

$$\alpha'\big(t(s_0)\big) = \dot{\alpha}(t_0)t'(s_0) = \dot{\alpha}(t_0)\frac{1}{\dot{s}(t_0)} = \dot{\alpha}(t_0)\frac{1}{v(t_0)} \tag{1}$$

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{\ddot{y}(t)-\dot{v}(t)\frac{\dot{y}(t)}{v(t)}}{\dot{x}(t)} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t)-\dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)} \tag{2}$$

$$(1)\wedge(2) \Rightarrow \qquad \kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t)-\dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{v^3(t)} \tag{3}$$

Krümmungskreis und Evolute einer Kurve

Definition. Gegeben sei die Kurve $\gamma\colon \vec{x} = \vec{x}(t), t\in I$.

1. Unter dem zum Kurvenpunkt $P(t_0)$ gehörende *Krümmungsradius* $r(t_0)$ versteht man $r(t_0) := \frac{1}{\kappa(t_0)}$, wobei $\kappa(t_0)$ die Krümmung von γ im Punkt $P(t_0)$ ist.

2. Für $\kappa > 0$ heißt γ in $P(t_0)$ *streng konvex* (streng linksgekrümmt), für $\kappa < 0$ heißt γ in $P(t_0)$ *streng konkav* (streng rechtsgekrümmt).

3. Tangentenvektor von γ in $P(t_0)$:

$$\dot{\vec{x}}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}, t \in I$$

Normalenvektor von γ in $P(t_0)$:

$$\vec{n}(t_0) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}, t \in I$$

Bemerkung. $\vec{n}(t_0)$ geht aus $\dot{\vec{x}}(t_0)$ durch Drehung um $\frac{\pi}{2}$ in positivem mathematischen Drehsinn hervor. **Aber:** $\vec{e_t}(t) \perp \dot{\vec{e_t}}(t) \neq \vec{n}$.

4. Es sei $M\big(x_M(t_0); y_M(t_0)\big)$ der Mittelpunkt des jeweiligen Krümmungskreises. Ortsvektor $\vec{x_M}(t_0)$.

$$\begin{aligned}
\vec{x_M}(t_0) &= \vec{x}(t_0) + r(t_0)\frac{\vec{n}(t_0)}{|\vec{n}(t_0)|} \\
&= \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{\dot{x}^2(t_0)+\dot{y}^2(t_0)}^3}{\dot{x}(t_0)\ddot{y}(t_0)-\dot{y}(t_0)\ddot{x}(t_0)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2(t_0)+\dot{y}^2(t_0)}} \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + \frac{\dot{x}^2(t_0)+\dot{y}^2(t_0)}{\dot{x}(t_0)\ddot{y}(t_0)-\dot{y}(t_0)\ddot{x}(t_0)} \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix} \qquad (4)
\end{aligned}$$

Definition. Gegeben sei die Kurve γ.

1. Unter dem *Krümmungsmittelpunkt* von γ im Kurvenpunkt $P(t_0)$ versteht man den Punkt M mit dem Ortsvektor (4).
Der zugehörige Krümmungskreis hat die Gleichung

$$\big(x - x_M(t_0)\big)^2 + \big(y - y_M(t_0)\big)^2 = r^2(t_0)$$

2. Die Menge aller zu einer Kurve γ gehörenden Krümmungsmittelpunkte heißt *Evolute* von γ.

Spezielle Kurven

Kreis

$$\vec{x}(t) = r\begin{pmatrix} \cos\big(\varphi(t)\big) \\ \sin\big(\varphi(t)\big) \end{pmatrix}$$

Ellipse

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a\cos\big(\varphi(t)\big) \\ b\sin\big(\varphi(t)\big) \end{pmatrix}$$

Zykloide

Zykloide

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} rt - a\sin t \\ r - a\cos t \end{pmatrix}$$

Epizykloide

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} (R+r)\cos t - a\cos\left[\left(1+\frac{R}{r}\right)t\right] \\ (R+r)\sin t - a\sin\left[\left(1+\frac{R}{r}\right)t\right] \end{pmatrix}$$

Hypozykloide

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} (R-r)\cos t + a\cos\left[\left(\frac{R}{r}-1\right)t\right] \\ (R-r)\sin t - a\sin\left[\left(\frac{R}{r}-1\right)t\right] \end{pmatrix}$$

Astroide $R := 4r, a := r, r > 0$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3r\cos t + r\cos(3t) \\ 3r\sin t - r\sin(3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos^3 t \\ R\sin^3 t \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad |x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$$

Differentialgleichungen

Wachstumsprozesse

AWP 1 (Lineares Wachstum).

$$\dot{f}(t) = k = \text{konst.} \quad \wedge \quad f(0) = y_0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{f(t) = kt + y_0}$$

AWP 2 (Exponentielles Wachstum).

$$\dot{f}(t) = k \cdot f(t) \quad \wedge \quad f(0) = y_0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{f(t) = y_0 e^{kt}}$$

AWP 3 (Beschränktes Wachstum).

$$\dot{f}(t) = k\big(g - f(t)\big) \quad \wedge \quad f(0) = y_0 \qquad , k \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{f(t) = g + (y_0 - g)e^{-kt}}$$

AWP 4 (Logistisches Wachstum).

$$\dot{f}(t) = k\big(g - f(t)\big)f(t) \quad \wedge \quad f(0) = y_0 > 0 \qquad , k > 0, g > 0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{f(t) = \frac{g}{1 + \left(\frac{g}{y_0} - 1\right) e^{-kgt}}}$$

Schwingungsdifferentialgleichungen

$$f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = 0 \tag{5}$$

Bemerkung. Mit den *Anfangswerten* $f(0) = y_0$ und $f'(0) = y_0'$.

1. Fall (Schwingfall): $\frac{a_1^2}{4} - a_0 < 0$

$$(5) \Leftrightarrow \boxed{f(t) = \mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2}t}\left[C_1 \sin\left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\, t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\, t\right)\right]}$$

mit $C_1 = \frac{a_1 y_0 + 2y_0'}{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}} \quad \wedge \quad C_2 = y_0, \qquad \omega = \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}$

2. Fall (aperiodischer Fall, Kriechfall): $\frac{a_1^2}{4} - a_0 > 0$

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = -\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \quad \wedge \quad \lambda_2 = -\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$$
$$(5) \Leftrightarrow \boxed{C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}}$$

mit $C_1 = \frac{\lambda_2 y_0 - y_0'}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad \wedge \quad C_2 = \frac{y_0' - \lambda_1 y_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$

3. Fall (aperiodischer Grenzfall): $\frac{a_1^2}{4} - a_0 = 0$

$$(5) \Leftrightarrow \boxed{f(t) = (C_1 t + C_2)\,\mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2}t}}$$

mit $C_1 = \frac{a_1}{2}y_0 + y_0' \quad \wedge \quad C_2 = y_0$

Spezialfall $a_1 = 0, a_0 > 0$

$$\ddot{f}(t) + a_0 f(t) = 0 \qquad , a_0 > 0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{f(t) = C_1 \sin(\sqrt{a_0}t) + C_2 \cos(\sqrt{a_0}t)}$$

mit $C_1 = \frac{\dot{f}(0)}{\sqrt{a_0}} \quad \wedge \quad C_2 = f(0), \qquad \omega = \sqrt{a_0}$